

Integraler över begränsade intervall

Frank Wikström

Integraler av typen

$$\int_a^b f(x) dx$$

ser ut som att de passar rätt illa att beräkna med hjälp av residykalkyl, åtminstone om integranden inte är periodisk. Med hjälp av ett kreativt variabelbyte, så går det dock att förvandla integralen till en som passar bättre in i residykalkylens metoder.

Vi illustrerar idén med integralen

$$\int_0^1 x^2 dx$$

som förstås är oerhört mycket enklare att beräkna direkt. Vi börjar med ett variabelbyte som förvandlar intervallet $[0,1]$ till $[0,\infty)$. Närmare bestämt sätter vi

$$\begin{aligned} t = \frac{x}{1-x} &\Leftrightarrow (1-x)t = x \\ &\Leftrightarrow t = x(1+t) \quad \Leftrightarrow x = \frac{t}{1+t}. \end{aligned}$$

Vi behöver också räkna ut dx :

$$dx = \left(\frac{t}{1+t} \right)' dt = \frac{(1+t) - t}{(1+t)^2} dt = \frac{dt}{(1+t)^2}.$$

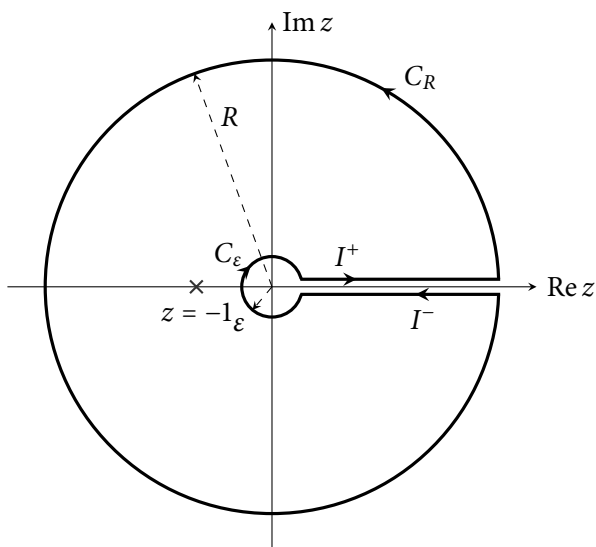
Beräkningen ovan visar att variabelbytet är inverterbart. När $x = 0$ blir $t = 0$ och när $x \rightarrow 1$ går $t \rightarrow \infty$. Efter variabelbytet har vi alltså integralen

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t} \right)^2 \cdot \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t)^4} dt. \end{aligned}$$

Denna integral kan nu behandlas med metoderna i avsnitt 10.5. Sätt

$$f(z) = \frac{z^2 \operatorname{Log} z}{(1+z)^4},$$

där Log_n betecknar den *naturliga* grenen av log och integrera över en hålkaka:



Vi undersöker vad som händer på de olika delarna av kurvan. På C_R är

$$\left| \frac{z^2 \text{Log}_n z}{(1+z)^4} \right| \leq \frac{4R^2(\ln R + 2\pi)}{R^4}$$

och ML -olikheten visar att

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^2 \text{Log}_n z}{(1+z)^4} \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{4R^2(\ln R + 2\pi)}{R^4} \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$.

En liknande uppskattning på C_ϵ ger

$$\left| \frac{z^2 \text{Log}_n z}{(1+z)^4} \right| \leq 16\epsilon^2(\ln \epsilon + 2\pi)$$

och därmed att

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{z^2 \text{Log}_n z}{(1+z)^4} \right| \leq 2\pi\epsilon \cdot 16\epsilon^2(\ln \epsilon + 2\pi) \rightarrow 0$$

då $\epsilon \rightarrow 0$. (Här utnyttjade vi att $|1+z| \geq \frac{1}{2}$ om ϵ är litet.)

Integralerna över de båda cirkelarna går alltså mot 0 då $R \rightarrow \infty$ och $\epsilon \rightarrow 0$. Det som återstår är att undersöka vad som händer på I^+ och I^- . På I^+ får vi

$$\int_{I^+} \frac{z^2 \text{Log}_n z}{(1+z)^4} dz = \int_\epsilon^R \frac{x^2 \ln x}{(1+x)^4} dx$$

och på I^- :

$$\begin{aligned}\int_{I^-} \frac{z^2 \operatorname{Log}_n z}{(1+z)^4} dz &= \int_R^\varepsilon \frac{x^2 (\ln x + 2\pi i)}{(1+x)^4} dx \\ &= - \int_\varepsilon^R \frac{x^2 (\ln x + 2\pi i)}{(1+x)^4} dx.\end{aligned}$$

Det följer därmed att

$$\int_{I^+} \frac{z^2 \operatorname{Log}_n z}{(1+z)^4} dz + \int_{I^-} \frac{z^2 \operatorname{Log}_n z}{(1+z)^4} dz = \int_\varepsilon^R \frac{-2\pi i x^2}{(1+x)^4} dx.$$

Residysatsen och gränsövergång ($R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$) ger till sist:

$$-2\pi i \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^4} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \left(\frac{z^2 \operatorname{Log}_n z}{(1+z)^4} \right),$$

dvs.

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^4} dx = - \operatorname{Res}_{z=-1} \left(\frac{z^2 \operatorname{Log}_n z}{(1+z)^4} \right),$$

eftersom $z = -1$ är den enda singulariteten för f inuti kurvan.

Denna singularitet är en *fyrddubbel pol* och residyregel 1 ger

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \left(\frac{z^2 \operatorname{Log}_n z}{(1+z)^4} \right) = \frac{1}{3!} (z^2 \operatorname{Log}_n z)''' \Big|_{z=-1}.$$

Vi sätter $g(z) = z^2 \operatorname{Log}_n z$ och deriverar:

$$\begin{aligned}g'(z) &= 2z \operatorname{Log}_n z + z \\ g''(z) &= 2 \operatorname{Log}_n z + 3 \\ g'''(z) &= \frac{2}{z},\end{aligned}$$

dvs. $g'''(-1) = -2$ och

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^4} dx = - \operatorname{Res}_{z=-1} \left(\frac{z^2 \operatorname{Log}_n z}{(1+z)^4} \right) = -\frac{1}{3!} \cdot (-2) = \frac{1}{3},$$

vilket inte borde komma som någon överraskning.

På liknande sätt kan man (åtminstone för vissa typer av integrander) hantera integralen

$$\int_a^b f(x) dx$$

genom att först göra variabelbytet

$$t = \frac{x - a}{b - x}$$

och därefter följa ovanstående metod.

Läs mer på www.funktionsteori.se