

Gaussisk integral via residykalkyl

Frank Wikström

Integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

är mycket viktig och dyker upp gång på gång i diverse skepnader, till exempel inom sannolikhetsteori, Fourieranalys eller som värdet av Gamma-funktionen, $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Det enklaste sättet att beräkna integralen är via att göra om den till en dubbelintegral och införa polära koordinater. Du har antagligen sett detta trick på kursen i flerdimensionell analys. Andra metoder att beräkna integralen bygger på derivation under integraltecknet, Laplacetransformer och identiteter för Γ -funktionen, men det går faktiskt också att göra via residykalkyl.

Det ansågs länge omöjligt att göra med residykalkyl, eftersom funktionen $f(z) = e^{-z^2}$ inte har några poler, men på 1940- och 1950-talet upptäcktes flera olika trick som gör det möjligt. Jag väljer att presentera det enklaste av dessa som lär ha upptäckts av den estnische matematikern Hellmuth Kneser på 1950-talet.

Knepet är följande: Låt

$$g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}},$$

där a är valt så att $a^2 = i\pi$, närmare bestämt

$$a = (1 + i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}e^{i\pi/4}.$$

Finessen nu är att

$$\begin{aligned} g(z) - g(z + a) &= \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} - \frac{e^{-(z+a)^2}}{1 + e^{-2a(z+a)}} = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} - \frac{e^{-(z^2+2az+a^2)}}{1 + e^{-2az-2a^2}} \\ &= \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} - \frac{e^{-(z^2+2az+i\pi)}}{1 + e^{-2az-2i\pi}} = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} + \frac{e^{-(z^2+2az)}}{1 + e^{-2az}} \\ &= \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} (1 + e^{-2az}) = e^{-z^2}. \end{aligned}$$

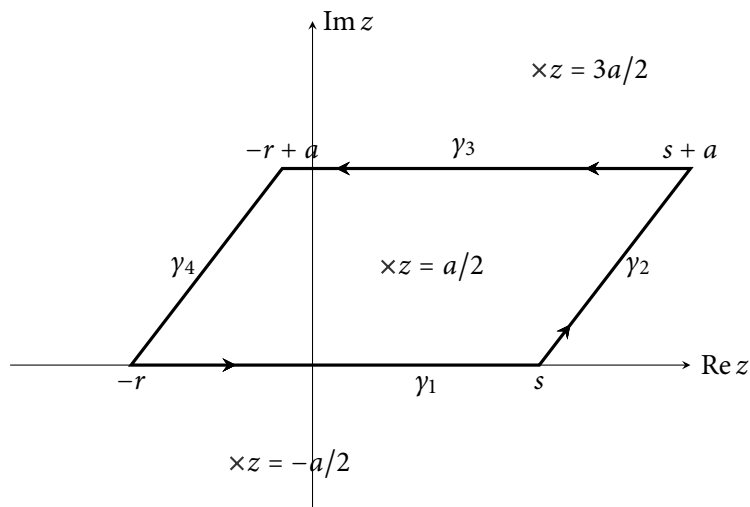
Dessutom är g holomorf, utom i punkter där $e^{-2az} = -1$, dvs. i punkter där

$$-2az = i\pi(2n + 1) = a^2(2n + 1) \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{a}{2}(2n + 1)$$

för $n \in \mathbb{Z}$.

Man kontrollerar att dessa punkter är *enkla poler* för g (till exempel genom att visa att derivatan av nämnaren är nollskild i dessa punkter).

Integrera g över ett parallelogram γ med hörn i $-r$, s , $s+a$ och $-r+a$ där $r, s > 0$ är reella tal. Funktionen g är holomorf på och inuti γ förutom i punkten $z = a/2$.



Residysatsen visar att

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a/2}(g(z)).$$

Å andra sidan är

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(z) dz &= \int_{\gamma_1} g(z) dz + \int_{\gamma_2} g(z) dz + \int_{\gamma_3} g(z) dz + \int_{\gamma_4} g(z) dz \\ &= \int_{-r}^s g(x) dx + \int_{\gamma_2} g(z) dz - \int_{-r}^s g(x+a) dx + \int_{\gamma_4} g(z) dz \\ &= \int_{-r}^s e^{-x^2} dx + \int_{\gamma_2} g(z) dz - \int_{\gamma_4} g(z) dz. \end{aligned}$$

Om vi låter $r, s \rightarrow \infty$, så kommer

$$\int_{-r}^s e^{-x^2} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

På γ_2 (med $z = x + iy$) gäller att

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} \right| &= \frac{|e^{-z^2}|}{|1 + e^{-2az}|} = \frac{e^{y^2 - x^2}}{|1 + e^{-2az}|} \\ &\leq \frac{e^{(\operatorname{Im} a)^2 - s^2}}{1 - |e^{-2az}|} \leq \frac{e^{(\operatorname{Im} a)^2 - s^2}}{1 - e^{-2as}} \end{aligned}$$

och ML-olikheten visar att

$$\left| \int_{\gamma_2} g(z) dz \right| \leq |a| \cdot \frac{e^{(\operatorname{Im} a)^2 - s^2}}{1 - e^{-2as}} \rightarrow 0$$

då $s \rightarrow \infty$. En motsvarande beräkning visar att

$$\left| \int_{\gamma_4} g(z) dz \right| \rightarrow 0$$

då $r \rightarrow \infty$.

Genom att sätta ihop ovanstående beräkningar följer att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a/2} (g(z)).$$

Residyn fås enklast med hjälp av residyregel 4:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-a/2} \left(\frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} \right) &= \frac{e^{-z^2}}{-2ae^{-2az}} \Big|_{z=-a/2} \\ &= \frac{e^{-a^2/4}}{-2ae^{a^2}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{-2ae^{i\pi}} \\ &= \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}} = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Med andra ord blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}.$$

Läs mer på www.funktionsteori.se